Experimentos aleatorios

Este cuadro, obra del pintor sevillano Bartolomé Esteban Murillo (1618-1682), representa a unos niños jugando a las cartas en la calle. Desde la antigüedad los hombres se han distraído con los juegos de azar.

Precisamente los juegos de azar fueron el origen de la teoría de probabilidades; pero, aunque la mayoría de los juegos de azar son tan antiguos como la humanidad misma, el cálculo de probabilidades no surgió hasta finales del siglo XVI y principios del siglo XVII.

Hoy en día el cálculo de probabilidades no solo se ocupa de problemas asociados a los juegos de azar, sino que junto con la estadística interviene en otros ámbitos de la vida. Algunas aplicaciones son los estudios sobre expectativas de vida con el fin de fijar las primas de seguros, el análisis de las previsiones de voto ante unas elecciones, o el estudio de marketing para lanzar un nuevo producto al mercado.

Comportamiento del azar

"Mañana es probable que llueva". "Al tirar un dado, es más probable sacar un número mayor que cuatro que no un uno". "Es probable que este tema entre en el examen". "Es poco probable que te toque la lotería".

Todos tenemos una noción intuitiva de probabilidad, pero ¿qué es exactamente? Podemos pensar qué es la probabilidad con el siguiente ejemplo.

Cogemos un dado y vamos apuntando cuántos cuatros salen cuando lo tiramos 5, 10, 20, 50 y 100 veces. Supongamos que nos sale lo siguiente:

Tiradas	Número de cuatros
5	2
10	3
20	5
50	8
100	17

Ahora fijémonos en la proporción de cuatros respecto al total de tiradas que hemos hecho:

$$\frac{2}{5} = 0{,}4;\ \frac{3}{10} = 0{,}3;\ \frac{5}{20} = 0{,}25; \frac{8}{50} = 0{,}16;\ \frac{17}{100} = 0{,}17$$

Después de este experimento podemos preguntarnos: "si vuelvo a tirar el dado, ¿qué probabilidades hay de que salga un cuatro?"

Es verdad que el resultado de la tirada dependerá del azar, pero hemos observado que si hacemos muchas tiradas, lo normal es que salga un cuatro unas 17 veces de cada 100. Por lo tanto, decimos que la probabilidad es aproximadamente del 17 %, o lo que es lo mismo, de 0,17.

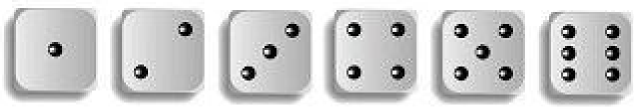
De hecho, si lo pensamos un poco, como un dado tiene 6 caras, y todas es igual de probable que salgan, es de esperar que, de cada 6 tiradas, una sea un cuatro, es decir, creemos que la probabilidad debería ser $\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots = 0{,}1\widehat{6}$.

Esto será la base de la ley de Laplace.

Realización de experimentos con dados y monedas. Cálculo de la frecuencia y probabilidad de un suceso.

Como ya se ha comentado, en un experimento aleatorio se puede determinar el conjunto de posibles resultados del experimento, aunque no podemos predecir previamente un resultado particular (sabemos que si lanzamos el dado saldrá un número del 1 al 6, pero no podemos decir con seguridad qué número va a salir en el siguiente lanzamiento). Pues bien, a ese conjunto de posibles resultados se le denomina espacio muestral, y podemos designarlo con la letra griega Ω (omega). Así, en nuestro ejemplo del dado, el espacio muestral será:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

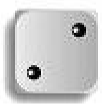


Por otra parte, cuando hablábamos de probabilidad, decíamos probabilidad de un suceso, y nos puede surgir la siguiente duda: ¿Es lo mismo suceso que resultado? Son conceptos diferentes y conviene aclararlo.

Digamos que, en un experimento aleatorio, con un determinado espacio muestral **Ω**, un suceso sería cualquier subconjunto de dicho espacio muestral (recordemos que los elementos del espacio muestral son todos los resultados posibles del experimento). Así, si el suceso está compuesto de un solo resultado, decimos que es un suceso elemental o simple, y si está formado por más de un resultado se dice que es un suceso compuesto.

Siguiendo con el ejemplo del dado, suceso elemental sería, por ejemplo:

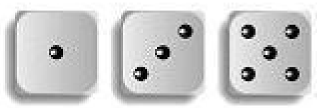
Suceso "que salga un 2" = {2}



(Comprende un solo resultado)

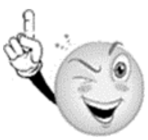
Y, sucesos compuestos serían, por ejemplo:

Suceso "que salga un número impar" = {1, 3, 5}



(El suceso está formado por tres resultados)

Aparte de esto, podemos hablar también de sucesos seguros, que serían aquellos que siempre se realizan (por ejemplo, "que salga un número natural del 1 al 6") ya que los resultados que lo componen son justamente todos los resultados del experimento que constituyen el espacio muestral, y sucesos imposibles, que son justamente lo contrario de los anteriores, es decir, que nunca tienen lugar (por ejemplo, "que salga un siete") ya que el o los resultados que lo forman no pertenecen al espacio muestral, es decir, no son resultados posibles del experimento.



141. Se lanza un dado; formar el espacio muestral y los sucesos "salir par", "salir impar" y "salir múltiplo de 3".

142. En una rifa se tienen papeletas numeradas del 1 al 100; formar el espacio muestral y los sucesos "salir número que empiece por 7", salir número capicúa" y "salir números que acaban en 3".

Cálculo de probabilidades

Regla de LaPlace

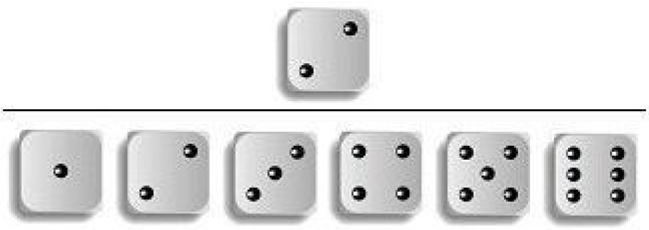
Llegados a este punto, vamos a ver cómo podemos calcular la probabilidad en determinados casos sin necesidad de realizar una infinidad de repeticiones del experimento.

Cuando en un experimento aleatorio todos los resultados posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir (son equiprobables), o dicho de otra manera, si todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio son equiprobables, se tiene que:

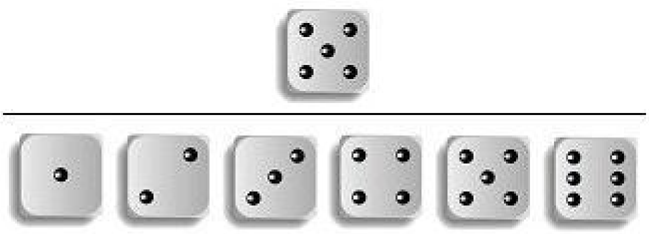
$$\text{Probabilidad de que ocurra un suceso} = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}$$

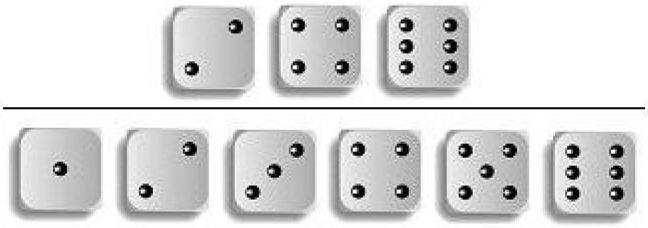
Esto nos facilita bastante las cosas, y esta fórmula es la regla de Laplace. Pero, para tenerlo más claro, vamos a aplicarlo a nuestro experimento del dado numerado del 1 al 6. Para ello, vamos a calcular las probabilidades teóricas de cada uno de los sucesos que hemos visto antes. En adelante, denotaremos la probabilidad de un suceso A como P(A), P por abreviación de probabilidad y el suceso entre paréntesis:

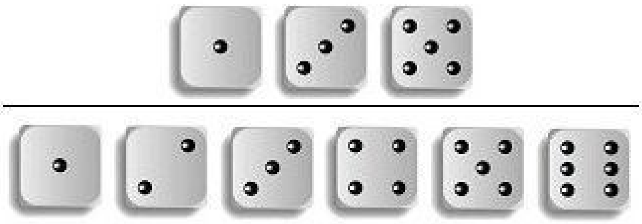
$P(salga\ un\ 2) = \qquad = \frac{1}{6}$

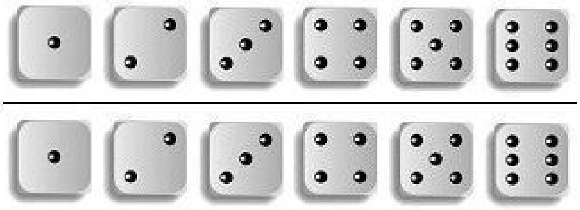


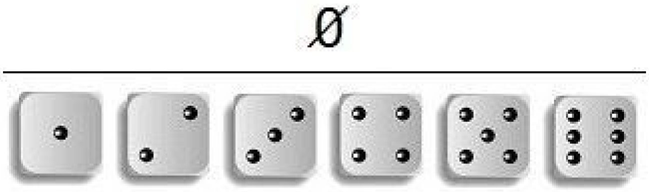
$P(salga\ un\ 5) = \qquad = \frac{1}{6}$



$P(\text{salga un número par}) =$  $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(\text{salga un número impar}) =$  $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(\text{salga un número natural del 1 al 6}) =$  $= \frac{6}{6} = 1$

$P(\text{salga un 7}) =$  $= \frac{0}{6} = 0$

143. Se lanzó un dado honesto –no cargado- dos veces, obteniéndose 4 en ambas oportunidades. ¿Cuál es la probabilidad de que en un tercer lanzamiento se obtenga nuevamente 4?

144. Se lanzan al aire consecutivamente dos monedas; se pide la probabilidad de que la segunda sea cara.

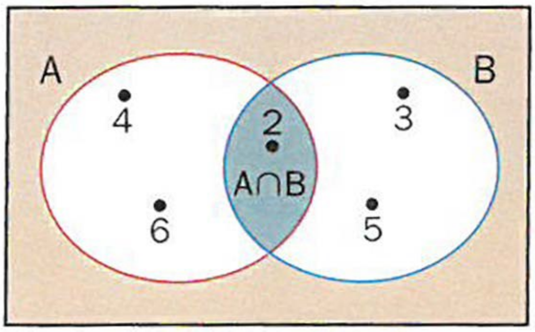
145. Se lanzan al aire uno tras otro tres dados de seis caras numeradas del 1 al 6. Se pide la probabilidad de que el número de tres cifras que se forme, empiece con 4.

146. Se lanza un dado y se obtiene 2. ¿Cuál es la probabilidad de que en un segundo lanzamiento se obtenga un número que, sumado con 2, sea inferior a 6?

147. Hacemos rodar un dado de seis caras; se pide la probabilidad del suceso “obtener 2” sabiendo que ha salido un número par.

Operaciones con sucesos

Unión de sucesos



En el experimento aleatorio del lanzamiento del dado, cuyo espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, consideremos los siguientes sucesos:

A = «salir par» {2, 4, 6}

B = «salir número primo» = {2, 3, 5}

Formemos el suceso:

C = «salir par o número primo» = {2, 3, 4, 5, 6}

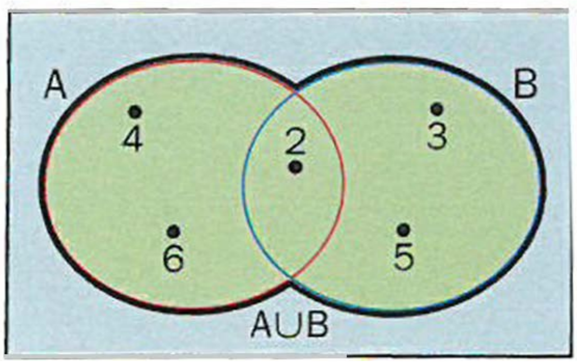
Este suceso se llama suceso unión de A y B.

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, llamamos suceso unión de A y B al suceso que se realiza cuando se realiza A o B.

Está formado por los puntos muestrales de A o B.

El suceso A unión B se representa por A U B o por A o B.

Intersección de sucesos



Consideremos nuevamente los sucesos A y B del ejemplo anterior:

A = «salir par» = {2, 4, 6}

B = «salir número primo» = {2, 3, 5}

Formemos el suceso D = «salir par y número primo» = {2}.

Este suceso se llama suceso intersección de A y B.

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, llamaremos suceso intersección de A y B al suceso que se realiza cuando se realizan simultáneamente los sucesos A y B. Está formado por los puntos muestrales comunes a los sucesos A y B.

El suceso A intersección B se representa por A ∩ B o por A y B.

Si la intersección de dos sucesos es el suceso imposible se dice que los sucesos son incompatibles. En caso contrario, se llaman compatibles.

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, se tiene:

Si $A \cap B = \emptyset$, entonces A y B son incompatibles.

Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces A y B son compatibles.

148. Calcular la unión y la intersección de los siguientes sucesos:

A = {1,2,5} y B = {2,3,5}

C = {2,4,6} y D = {2,5}

F = {1,3} y G = {1,3,6}

H = {3} y I = {5}

M = {2,5} y N = {1,3,6}

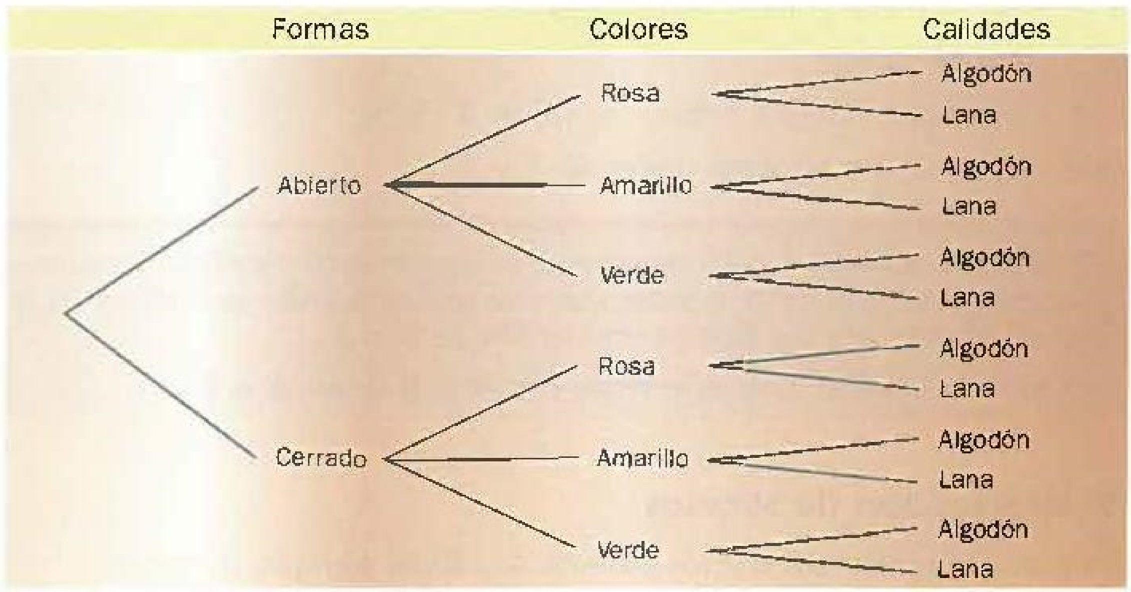
P = {2,4} y Q = {1,6}

Técnicas de recuento. Diagrama de árbol.

Vanesa quiere regalar a su hermana por su cumpleaños un jersey, pero duda si abierto o cerrado; rosa, amarillo o verde; y de algodón o de lana.

¿Cuántas posibilidades tiene?

Observa el siguiente diagrama en árbol:



formas posibles	x colores posibles		x calidades posibles			
2	x	3	x	2	= 12	

Por tanto, tiene 12 posibilidades de elegir jersey.

Si un primer experimento tiene m resultados distintos y un segundo experimento tiene n resultados distintos, entonces el número de resultados distintos para los dos experimentos es m · n.

149. Se lanzan tres monedas. Formar el espacio muestral.

150. Se lanzan una moneda y un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6. ¿cuántos elementos tiene el espacio muestral?

151. Se lanzan una moneda y un dado y se extrae una carta de una baraja. ¿cuántos elementos tiene el espacio muestral?

Probabilidad de la unión de sucesos

Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles

Para el experimento del lanzamiento del dado consideremos los sucesos:

A = {2, 4, 6}. B = {5}; A U B = {2, 4, 5, 6}

Si calculamos probabilidades, resulta:

p(A) = $\frac{3}{6}$

p(B) = $\frac{1}{6}$

p(A U B) = $\frac{4}{6}$ = p(A) + p(B)

Si dos sucesos, A y B, son incompatibles, se verifica: p(A U B) = p(A) + p(B)

Probabilidad de la unión de sucesos compatibles

Lanzamos un dado y consideremos los sucesos:

A = «obtener un número impar» = {1, 3, 5} = p(A) = $\frac{3}{6}$

B = «obtener un múltiplo de 3» = {3, 6} = p(B) = $\frac{2}{6}$

Estos sucesos son compatibles. Entonces:

A U B = {1, 3, 5, 6} = p(A U B) = $\frac{5}{6}$, y A ∩ B = {3} = $\frac{1}{6}$

Con estos resultados podemos comprobar la relación:

$\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, es decir, p(A U B) + p(A ∩ B) = p(A) + p(B)

Y despejando p(A U B) = p(A) + p(B) - p(A ∩ B)

Si A y B son dos sucesos compatibles, se verifica:

p(A U B) = p(A) + p(B) - p(A ∩ B)

152. En el experimento de extraer una carta de una baraja española se consideran los sucesos: A = «obtener un oro», B = «obtener un rey» y C = «obtener el as de espadas». Hallar la probabilidad de A U B y A U C.

Probabilidad de sucesos en experimentos compuestos

Vamos a ver la forma de hallar la probabilidad de un suceso en un experimento compuesto a partir de las probabilidades de los sucesos de los experimentos simples que lo componen.

Para ello, resolveremos los siguientes ejemplos, primero aplicando la definición de Laplace y posteriormente como producto de probabilidades de los sucesos de los experimentos simples.

Ejercicio resuelto

Lanzamos tres veces una moneda. Hallar la probabilidad de obtener tres caras.

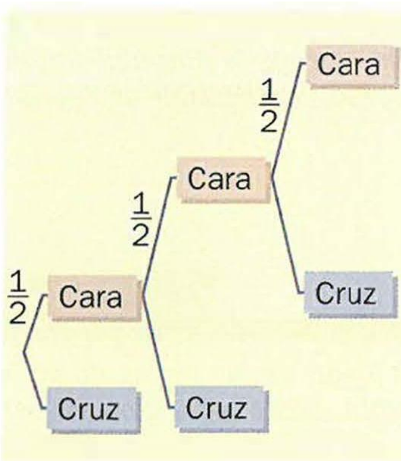
El espacio muestral es:

E = {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX}

Casos favorables: 1. Casos posibles: 8.

p(C y C y C) = p(C ∩ C ∩ C) = $\frac{1}{8}$

Observa el diagrama en árbol:



Fíjate que podíamos haber obtenido la probabilidad pedida sin más que calcular el producto de las probabilidades de cada suceso del siguiente modo:

p(C ∩ C ∩ C) = p(C) · p(C) · p(C) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

En los experimentos compuestos cada resultado viene dado por un camino del diagrama en árbol; si indicamos sobre cada rama su probabilidad, vemos que podemos obtener la probabilidad del camino multiplicando las probabilidades de cada una de sus ramas. Este es un importante resultado que se conoce como regla del producto, y dice así: "La probabilidad de un camino es igual al producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino".

153. Extraemos consecutivamente y sin devolución dos cartas de una baraja. Hallar la probabilidad de que ambas sean reyes.

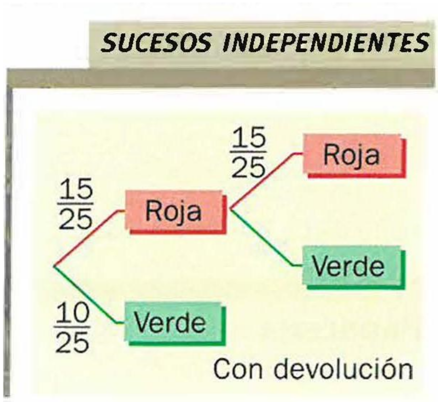
Dependencia e independencia de sucesos

En una bolsa hay 15 bolas rojas y 10 verdes. Extraemos dos bolas de la bolsa. Hallar la probabilidad de que ambas sean rojas:

a) Devolviendo la primera bola extraída. b) Sin devolverla.

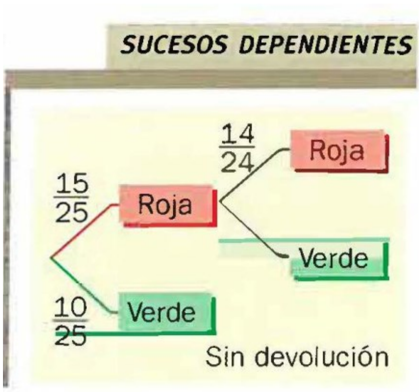
Representamos por R_1 = «obtener bola roja en la primera extracción» y por R_2 = «obtener bola roja en la segunda extracción».

a) Con devolución. Según el diagrama en árbol, tenemos:



p (roja y roja) = p ($R_1 \cap R_2$) = $\frac{15}{25} \cdot \frac{15}{25} = \frac{225}{625} = \frac{9}{25}$

b) Sin devolución. Según el diagrama en árbol, tenemos:



p(roja y roja) = $p(R_1 \cap R_2) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} = \frac{210}{600} = \frac{7}{20}$

En a, el resultado de la primera extracción no influye o condiciona el de la segunda; se dice que los sucesos son independientes.

En cambio, en b, el resultado obtenido en la primera extracción condiciona el resultado de la segunda, ya que supuesto que se ha obtenido una bola roja, como no se devuelve, tenemos 14 bolas rojas y 24 bolas en total. Por ello se dice que los sucesos son dependientes. Escribimos entonces:

$p(R_1$ y $R_2) = p(R_1) \cdot p(R_2$, supuesto ocurrido $R_1)$

La probabilidad $p(R_2$, supuesto ocurrido $R_1)$ se llama probabilidad de R_2 condicionada a R_1 y se representa por $p(R_2/R_1)$.

Si A y B son independientes se verifica: $p(A$ y $B) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Si A y B son dependientes se verifica:

$p(A$ y $B) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$

154. Extraemos de una baraja tres cartas. Hallar la probabilidad de que sean tres ases en los siguientes casos:

a) Con devolución después de cada extracción.

b) Sin devolución.